

Gruppenübung 2

Definitionen

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- *positiv definit* wenn $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- *positiv semidefinit* wenn $f(0) = 0$ und $f(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- *negativ definit* wenn $-f$ positiv definit ist,
- *negativ semidefinit* wenn $-f$ positiv semidefinit ist und
- *indefinit* wenn f weder positiv noch negativ definit ist.

f heißt *radial unbeschränkt*, wenn $|f(x)| \rightarrow \infty$ für $\|x\| \rightarrow \infty$.

Aufgabe 1 Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionen $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit, negativ definit oder indefinit sind. Zeichnen Sie die Niveaumengen $N_c := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid V(x_1, x_2) = c\}$ der Funktionen. Sind die Funktionen radial unbeschränkt? Testen Sie gegebenenfalls ob Sie die Funktion durch die Addition einer Konstante positiv definit machen können.

a) $V(x_1, x_2) := x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$.

Lösung:

Aus dem binomischen Lehrsatz folgt unmittelbar $V(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 > 0$ für $(x_1, x_2) \neq 0$, damit ist die Funktion positiv semidefinit. Die Niveaumengen sind Parallelen zur Hauptdiagonalen. Die Funktion ist nicht radial unbeschränkt, so gilt z.B. für die Folge $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\xi_n = (x_n, y_n) = (n, n)$, dass $|\xi_n| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, aber $V(\xi_n) = 0$. Anschaulich überlegt man sich, dass die Funktion auf den Niveaulinien konstant bleibt, d.h. wenn man entlang einer Niveaulinie gegen unendlich strebt, so strebt die Funktion sicher nicht gegen unendlich.

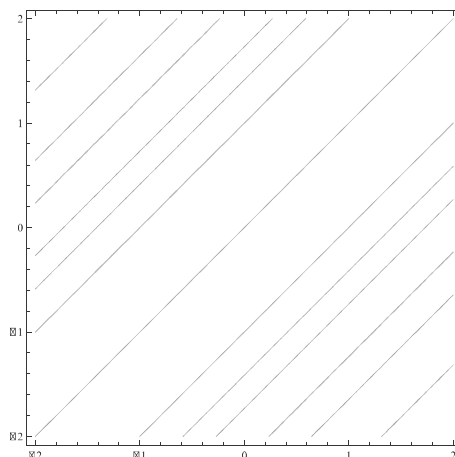


Abbildung 1: Niveaulinien Aufg. 1a)

b) $V(x_1, x_2) := x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$

Lösung:

Positiv definit, da $V(x) = (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0$ für $x \neq 0$.

Alternative: Die Funktion $V(x_1, x_2)$ kann als Quadrik im $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden, es ergibt sich:

$$V(x_1, x_2) = x^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} x \text{ mit } x = (x_1 \ x_2)^T.$$

Eine quadratische Form dieser Art ist genau dann positiv definit, wenn die Eigenwerte von A positiv sind. Die Eigenwerte kann man entweder ausrechnen oder man sieht $\text{Spur}(A) = 2 > 0$ und $\det(A) = \frac{3}{4} > 0$. Da die Spur die Summe und die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist, genügt das im Zweidimensionalen schon um die Positivität beider Eigenwerte zu gewährleisten. Damit sind die Niveaumengen Ellipsen. Um die exakte Form der Niveaumengen zu bestimmen muss man die Eigenvektoren der Matrix A bestimmen.

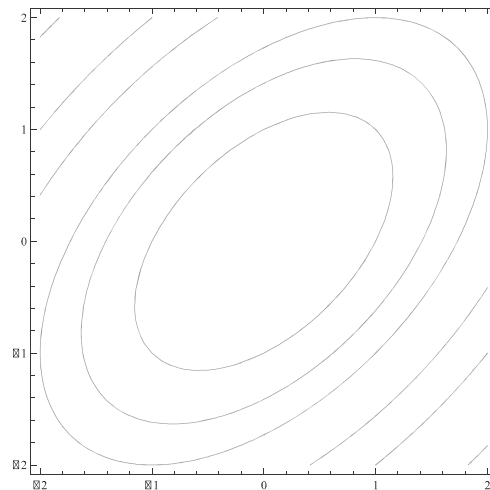


Abbildung 2: Niveaulinien Aufg. 1b)

c) $V(x) = e^{x_1^2 + x_2^2}$

Lösung:

Die Funktion ist nicht positiv definit, da $V(0,0) = 1 \neq 0$. $V(x_1, x_2)$ kann modifiziert werden zu $\bar{V}(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2} - 1$.

$\bar{V}$ ist positiv definit, denn $\bar{V}(0) = 0$ und $x_1^2 + x_2^2$ ist positiv definit und die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend und positiv. Weiterhin folgt aus der Monotonieeigenschaft der Exponentialfunktion und der radialen Unbeschränktheit von $x_1^2 + x_2^2$ dass auch $\bar{V}$ radial unbeschränkt ist.

Die Höhenlinien sind in Abbildung 3 dargestellt.

Aufgabe 2 Sei $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $V(x) := x^T P x$, wobei P eine quadratische, symmetrische Matrix ist. Welche Eigenschaften muss P erfüllen damit V positiv definit ist. Geben Sie eine Methode an um diese Eigenschaft bei einer konkreten Matrix zu überprüfen.

Lösung:

Eine quadratische Form wie V ist genau dann positiv definit, wenn die Matrix P positiv definit ist. Dies ist, da P als symmetrisch angenommen wurde, genau dann der Fall, wenn alle Eigenwerte λ_k von P positiv sind:

Symmetrische Matrizen haben rein reelle Eigenwerte, die algebraische und geometrische Vielfachheit stimmt überein, d.h. jedes $x \in \mathbb{R}^n$ kann als Linearkombination von Eigenvektoren geschrieben werden: $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$. Zusätzlich weiß man, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind. Damit ergibt sich:

$$x^T P x = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k \right)^T P \sum_{l=1}^n \alpha_l v_l = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k^T \sum_{l=1}^n \lambda_l \alpha_l v_l = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k^2 v_k^T v_k.$$

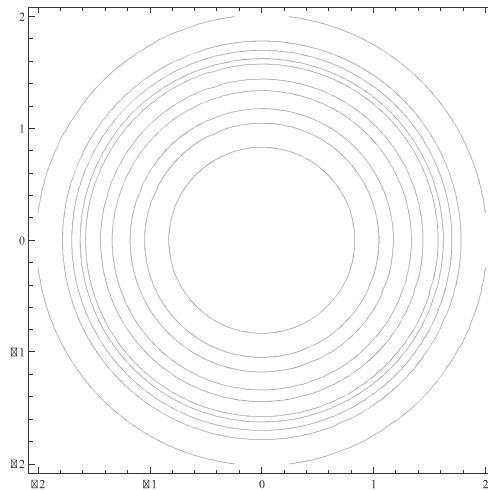


Abbildung 3: Niveaulinien Aufg. 1c)

Um es praktisch nachzuprüfen, ob eine Matrix positiv definit ist, kann man auch die Hauptminoren prüfen. Sind alle Hauptminoren positiv, so ist die Matrix positiv definit. Bisweilen wird diese Aussage als Sylvesterkriterium bezeichnet.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie für folgende Systeme die Stabilitätseigenschaften (lokal asymptotisch stabil, lokal exponentiell stabil, global asymptotisch stabil, global exponentiell stabil, exponentiell stabil) des Ursprungs $x = 0$. Verwenden Sie hierzu $V(x) = \frac{1}{2}x^2$. Welche Aussagen erlaubt die Linearisierungsmethode?

a) $\dot{x} = -x^3, x(0) = x_0$

Lösung:

V ist positiv definit und radial unbeschränkt.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x\dot{x} \\ &= -x^4.\end{aligned}$$

D.h. $\dot{V}(x) < 0$ für $x \neq 0$ und damit folgt aus der zweiten Methode von Lyapunov die globale asymptotische Stabilität des Ursprungs.

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x)|_{x=0} = 3x^2|_{x=0} = 0.$$

Somit ist mit Hilfe der Linearisierung keine Aussage möglich (da Eigenwert bei 0). Es folgt allerdings, dass der Ursprung nicht exponentiell stabil sein kann.

b) $\dot{x} = x^2, x(0) = x_0$

Lösung:

Lyapunov:

$$\dot{V}(x) = x^3$$

Weil $\dot{V}$ indefinit ist, ist keine Stabilitätsaussage mit dem Lyapunov-Theorem möglich. Die Linearisierung liefert

$$DF|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x}f(x)|_{x=0} = 2x|_{x=0} = 0,$$

also ist hier auch keine Aussage möglich, außer, dass der Ursprung nicht exponentiell stabil ist. Al-

lerdings können wir die Gleichung direkt integrieren:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^2 \\ \frac{dx}{x^2} &= dt \\ \left[-\frac{1}{x} \right]_{x_0}^{x(t)} &= t - 0 \\ x(t) &= \frac{x_0}{1 - tx_0}\end{aligned}$$

D.h. die Lösung wächst für $x_0 > 0$ in endlicher Zeit unbeschränkt (endliche Entweichzeit), damit ist der Ursprung instabil.

c) $\dot{x} = -(e^x - 1), x(0) = x_0$

Lösung:

V ist positiv definit und radial unbeschränkt.

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} = -x(e^x - 1),$$

also ist $\dot{V} < 0$ für $x \neq 0$ und damit ist der Ursprung global asymptotisch stabil. Die Linearisierung liefert

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x)|_{x=0} = -e^x|_{x=0} = -1,$$

und somit folgt aus der Linearisierung die lokale exponentielle Stabilität.

Alternative: Im eindimensionalen Fall kann man sich leicht Gedanken über die Stabilität von Differentialgleichung machen indem man die Funktionswerte des *Vektorfeldes* betrachtet: Positive Funktionswerte entsprechen der Änderung in die positive Koordinatenrichtung, negative entsprechend negativer Änderung. Siehe Abbildung 4

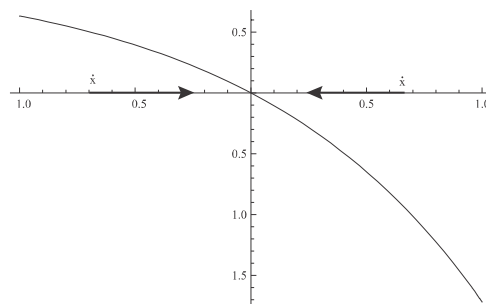


Abbildung 4: Richtungsfeld zu Aufg. 3c)

Aufgabe 4 Sei $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(a) = 0$. Wir betrachten

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0.$$

a) Bestimmen Sie die Ruhelage des Systems.

Lösung:

Aus $f(a) = 0$ folgt, dass $x_s = a$ eine Ruhelage ist. Außerdem weiß man wegen $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$, dass die Funktion streng monoton fällt. Damit kann es keine andere Nullstelle geben. Also auch

$$0 = f(x_s) \Leftrightarrow x_s = a$$

b) Transformieren Sie das System so dass die Ruhelage in 0 liegt.

Lösung:

Als Transformation wählt man $z = x - a$, dann ergibt sich

$$\dot{x} = \dot{z} = f(x) = f(z + a).$$

Mit $g(z) = f(z + a)$ erhält man

$$\dot{z} = g(z).$$

Für $g(z)$ gilt: $\frac{\partial g}{\partial z} < 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$, da

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}}_{<0} \underbrace{\frac{\partial(z+a)}{\partial z}}_{=1}$$

- c) Untersuchen Sie das transformierte System mit Hilfe der Linearisierungsmethode auf Stabilität.

Lösung:

$$\frac{\partial}{\partial z} g|_{z=0} < 0.$$

Damit ist $z_s = 0$ lokal stabil.

Eigentlich kann man an dieser Stelle keine Aussage über das globale Verhalten machen, allerdings ist das Problem eindimensional. Analog zum alternativen Lösungsweg von Aufgabe 3c) überlegt man sich dann, wie das Richtungsfeld aussieht. Offenbar geht g durch den Ursprung und ist wegen der Monotonie für negative z positiv, für positive z entsprechend negativ. Insbesondere hat die Funktion keine anderen Gleichgewichtspunkte, da g keine weiteren Nullstellen hat, das Richtungsfeld kann daher nicht 'umdrehen' da der Übergang von positiver in negativer Richtungsänderung 'Stillstand' also einen Gleichgewichtspunkt benötigt. Daher kann in diesem eindimensionalen Sonderfall durch lokale Stabilität auf globale Stabilität geschlossen werden, im allgemeinen ist das jedoch falsch!

- d) Untersuchen Sie das transformierte System mit Hilfe einer quadratischen Lyapunov-Funktion V auf Stabilität.

Lösung:

Der Ansatz erfolgt mit $V(z) = \frac{z^2}{2}$, und es ergibt sich

$$\dot{V}(z) = z\dot{z} = zg(z).$$

Fall 1: $z > 0 \Rightarrow \dot{V}(z) < 0$ da $z > 0$ und $g(z) < 0$.

Fall 2: $z < 0 \Rightarrow \dot{V}(z) < 0$ da $z < 0$ und $g(z) > 0$.

Weil V radial unbeschränkt ist, ist $z_s = 0$ global asymptotisch stabil.

- e) Untersuchen Sie das transformierte System mit Hilfe der Funktion (nach Krasowskii) $V(x) := g(x)^2$ auf Stabilität, dabei ist g das transformierte Vektorfeld.

Lösung:

Mit befolgen der Kettenregel der Differentiation ergibt sich

$$\frac{d}{dt} V(z(t)) = \frac{d}{dt} g(z(t))^2 = \underbrace{\frac{\partial g(z(t))^2}{\partial g(z(t))}}_{=2g(z)} \underbrace{\frac{\partial g(z(t))}{\partial z(t)}}_{=g'(z)} \underbrace{\frac{dz(t)}{dt}}_{=\dot{z}=g(z)}$$

Also:

$$\dot{V}(z) = 2 \underbrace{g(z)}_{>0} \underbrace{\frac{\partial g(z)}{\partial z}}_{<0} < 0.$$

Da $V = g^2$ positiv definit ist, ist $z_s = 0$ lokal asymptotisch stabil. Allerdings ist nicht sichergestellt, dass $V = g^2$ auch radial unbeschränkt ist, daher ist eine Aussage über globale asymptotische Stabilität nicht so einfach möglich.

- f) Untersuchen Sie das transformierte System mit Hilfe der Funktion $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $V(x) := -\int_0^x g(s) ds$ auf Stabilität. Wie oben bezeichnet, ist g das transformierte Vektorfeld.

Lösung:

Mit

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x g(s) ds = -g(x)$$

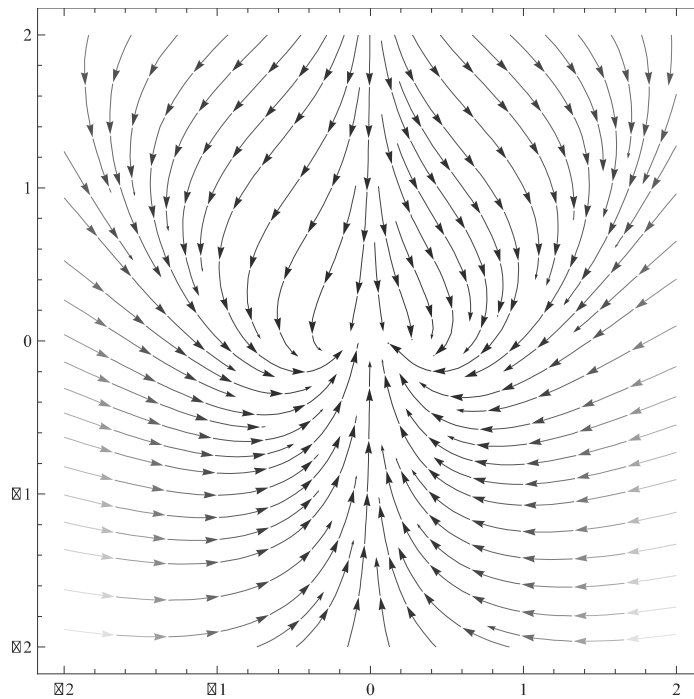


Abbildung 5: Phasenportrait zu Aufg. 5

ergibt sich:

$$\begin{aligned}\dot{V}(z) &= \frac{\partial V}{\partial z} g(z) \\ &= -g^2(z) < 0.\end{aligned}$$

Da $g'(z) < 0$, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $d > 0$, sodass $\forall z \geq \varepsilon : g(z) \leq -d$ und $\forall z \leq -\varepsilon : g(z) \geq d$. Damit ist V radial unbeschränkt und $z_s = 0$ ist global asymptotisch stabil.

Aufgabe 5 Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 - x_2.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine geeignete Lyapunov-Funktion $V(x_1, x_2)$ und weisen Sie die Stabilität des Ursprungs nach.

Lösung:

Der Standardansatz für Lyapunovfunktionen ist meistens ein *sum of squares* Ansatz: $V = \frac{1}{2}(ax_1^2 + bx_2^2) > 0$ für alle positiven a, b .

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \nabla V \cdot \dot{x} \\ &= ax_1(-x_1^3 + 2x_1x_2) + bx_2(-x_1^2 - x_2) \\ &= -ax_1^4 - bx_2^2 + (2a - b)x_1^2x_2 \stackrel{!}{<} 0\end{aligned}$$

Setzt man z.B. $b = 2a$, dann ist $\dot{V}$ negativ definit und $V = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$. Wegen der radialen unbeschränktheit von V ist der Ursprung folglich global asymptotisch stabil. Abbildung 5 zeigt das Phasenportrait des Vektorfeldes um den Ursprung.